جامعة البعث　　　　　　**امتحان مقرر التحليل1**　　　　　　الاسم

كلية العلوم　　　　　　العام الدراسي 2015–2016　　　　　　الرقم :

السنة أولى– رياضيات –ف2

السؤال الأول [30]: ليكن لدينا السلاسل التالية :

$$S_1=\sum_{n=4}^{\infty}\ln\left[\frac{2n^2+n}{(n+1)(2n-1)}\right],\ S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\arccos\left(\frac{n^3+n+2}{n^3-n^4}\right)^7,\ S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)(x+5)^n\ .$$

و المطلوب : 1) ادرس تقارب السلسلتين الأولى والثانية واحسب المجموع في حال التقارب !

2) أوجد المجال النهائي لتقارب السلسلة الأخيرة .

السؤال الثاني [50د]: ليكن لدينا الدالتين التاليتين :

$$y_1=4e^{3x}+x^3+x^5+\cos x+\ln x+x^4+7\ ,\quad y_2=\begin{cases}\sin\dfrac{(x^3-27)\pi}{9(x^2-9)} & ;\ x<3\\ 0 & ;\ x=3\\ (x-3)^{-1}Sh(x-3) & ;\ x>3\end{cases}$$

و المطلوب :

1) أوجد معادلة المماس للمنحني $z=y_1^{(4)}$ في نقطة فاصلتها $x=\frac{\pi}{2}$!

2) ادرس استمرار الدالة y_2 وحدد نوع نقطة الانقطاع إن وجدت!

3) اذكر منحنيين من المنحنيات الشهيرة مع الرسم ومعادلة كل منهما.

السؤال الثالث [20 د]: ادرس تقارب الجداءات اللانهائية التالية :

$$P_1=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\sqrt[3]{n}+5}{n\sqrt[3]{n}}\right),\ P_2=\prod_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{7n^3+4}{7n^3++5n^2+1}\right)^2$$

انتهت الأسئلة

حمص في 3/ 7 /2016　　　　　　مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

د. مصطفى حسن

سلم تصحيح امتحان مقرر التحليل1 للسنة الاولى رياضيات-15-16-ف2

السؤال الأول [30د]: 1) السلسلة الأولى (15)

الحد العام للسلسلة الثانية يكتب بالشكل :

$$a_n = \ln\left[\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}\right] = \ln\left[(n)(2n+1)\right] - \ln\left[(n+1)(2n-1)\right] =$$
$$= \ln(n) + \ln(2n+1) - \ln(n+1) - \ln(2n-1)$$

نوجد متتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(k) + \ln(2k+1) - \ln(k+1) - \ln(2k-1)\right] =$$
$$= \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) - \ln(1) + \ln(2) + \ln(5) - \ln(3) - \ln(3) +$$
$$+ \ln(3) + \ln(7) - \ln(4) - \ln(5) + \ln(4) + \ln(9) - \ln(5) - \ln(7) +$$
$$+ \ln(n-1) + \ln(2n-1) - \ln(n) - \ln(2n-3) +$$
$$+ \ln(n) + \ln(2n+1) - \ln(n+1) - \ln(2n-1) = \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2)$$

بما أن متتالية المجاميع الجزئية متقاربة من $\ln(2)$ فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها يساوي $\ln(2)$. أما الثانية فهي متباعدة لأنها لاتحقق الشرط اللازم(5)

$$S_2 : a_n = \arccos\left(\frac{n^3+n+2}{n^3-n^4}\right)^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} \arccos(0) = 1 \neq 0$$

2) السلسلة (10) إن سلسلة القوى تملك الحد العام والمركز ونصف قطر ومجال التقارب التاليين

$$a_n = \frac{1}{n^3}, c = -5 \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3} = 1 \Rightarrow I = \left]-6, -4\right[$$

$$S_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)(-1)^n \;, S_{x=2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

فالسلسلة $S_{x=1}$ متناوبة وهي تحقق شرطي لايبنتز فهي متقاربة

$$a_n = \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;, a_n = \frac{1}{n^3} > \frac{1}{(n+1)^3} = a_{n+1}$$

فهي متقاربة والسلسلة $S_{x=2}$ متقاربة لأنها سلسلة ريمان فيها $p = 3 > 1$ ، فالمجال النهائي $[-6, -4]$

الجواب الثاني [50 د]:

1) معادلة المماس-14-:

$$z = y_1^{(4)} = 324e^{3x} + 24x + \cos(x+2\pi) - \frac{6}{x^4} + 24 \Rightarrow z_0 = 324e^{\frac{3\pi}{2}} + 12\pi + \frac{96}{\pi^4} + 24$$

$$z' = y_1^{(5)} = 972e^{3x} + 120 + \cos\left(x + \frac{5}{2}\pi\right) + \frac{24}{x^5} \Rightarrow z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 972e^{\frac{3\pi}{2}} + 12\pi + \frac{768}{\pi^5} + 120$$

$$\Rightarrow z - z_0 = z'\left(\frac{\pi}{2}\right)(x - x_0) \Rightarrow z - \left(324e^{\frac{3\pi}{2}} + 12\pi + \frac{96}{\pi^4} + 24\right) = \left(972e^{\frac{3\pi}{2}} + 12\pi + \frac{768}{\pi^5} + 120\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

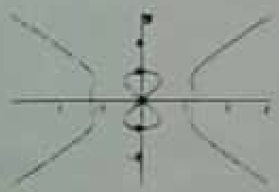
2) استمرار الدالة $h(x)$ -20- الدالة مستمرة لأنها تركيب دوال مستمرة ولكن في النقطة $x = 3$ نجد

$$\lim_{x \to 3^-} y_2 = 1, \quad \lim_{x \to 3^+} y_1 = 1 \neq h(3) = 0$$

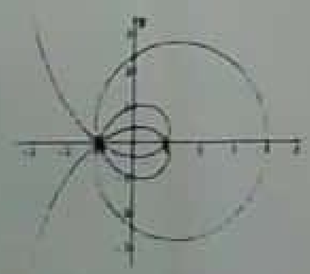
فالدالة غير مستمرة من اليمين وبما أن كلا النهايتين غير محدودة فنقطة الانقطاع 3 هي من النوع الأول

3) (8-8-16) تعطى المعادلة الديكارتية لمنحني الشيطان بالشكل التالي: $y^4 - x^4 + ay^2 + bx^2 = 0$

و يأخذ منحنيه الشكل التالي :



(منحني الحثير) $x(t) = \dfrac{a\sin(m+n)}{\sin(m-n)}, \quad y(t) = \dfrac{2a\sin(m)\sin(n)}{\sin(m-n)}$



الجواب الثالث [20 د]: ادرس تقارب الجداءات اللانهائية التالية (7+4+4)

أ) الحد العام للجداء الأول يكتب بالشكل -13- $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{5}{n\sqrt[3]{n}}\right)$

... $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ متقارب إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة" فإنه لدراسة تقارب الجداء المعطى لابد من دراسة تقارب المتسلسلة $5\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$.

ومن أجل ذلك نستعين بالمتسلسلة التوافقية المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ونطبق اختبار نهاية النسبة بالشكل

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt[3]{n}}=5$$

بما أن $0<k=5<\infty$ فإنه بحسب اختبار نهاية النسبة تكون المتسلسلتين من طبيعة واحدة ومنه نستنتج أن المتسلسلة $5<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$، وبالتالي بحسب المبرهنة التي ذكرناها في بداية الحل يكون الجداء المعطى متباعد

أما في الجداء الثاني فنلاحظ أن-7

$$P_2=\prod_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{7n^3+4}{7n^3++5n^2+1}\right)^2 \quad a_n=\arctan\left(\frac{7n^3+4}{7n^3++5n^2+1}\right)^2\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\pi}{2}\neq 1$$

فهو متباعد لأنه لا يحقق الشرط اللازم

د. مصطفى حسن